EM1.2. Champ créé par une demi-sphère en un point de son axe.

1. Champ électrostatique en *O*.

L'axe *Oz* est axe de symétrie de la distribution des charges. Le champ en *O* est donc porté par cet axe.

On considère un élément de surface de la demi sphère centré en un point *P*. Le champ électrostatique élémentaire créé par cet élément au point *O* de l'axe *Oz* a pour expression :

$$\mathrm{d}\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{\sigma \mathrm{d}S}{PO^2}\vec{u}_{PO} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{\sigma \mathrm{d}S}{R^2}\vec{u}_{PO}$$

Seule la projection de ce vecteur sur l'axe *Oz* contribue au champ au point *O* :

$$\mathrm{d}E_z = \mathrm{d}\vec{E}.\vec{u}_z = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{\sigma \mathrm{d}S}{R^2}\vec{u}_{PO}.\vec{u}_z = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{\sigma \mathrm{d}S}{R^2}\cos\theta$$

$$\mathrm{d}E_z = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{\sigma R^2 \mathrm{d}\varphi}{R^2}\sin\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta$$

La composante du champ en *O* s'écrit :

$$E_z(O) = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_o}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi/2}\sin\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta$$

$$E_z(O) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_o}\int_0^{\pi/2}\sin\theta\mathrm{d}\sin\theta$$

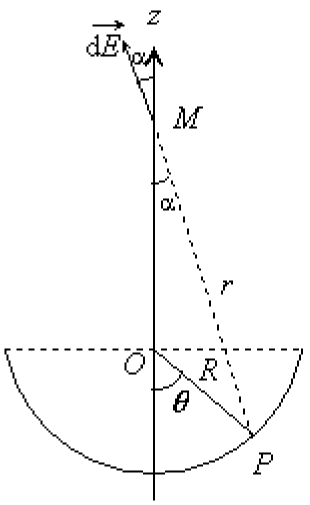
$$E_z(O) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_o}\left[\frac{1}{2}\sin^2\theta\right]_0^{\pi/2}$$

$$\boxed{E_z(O) = \frac{\sigma}{4\varepsilon_o}}$$

2. Champ électrostatique en M.

L'axe *Oz* est axe de symétrie de la distribution des charges. Le champ en *M* est donc porté par cet axe.

On considère un élément de surface de la demi-sphère centré en un point *P*.



www.kholaweb.com

Le champ électrostatique élémentaire créé par cet élément au point M de l'axe Oz a pour expression :

$$\mathrm{d}\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{\sigma R^2 \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi}{r^2}\vec{u}_{PM}$$

Seule la projection de ce vecteur sur l'axe Oz contribue au champ au point M :

$$\mathrm{d}E_z = \mathrm{d}\vec{E}.\vec{u}_z = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{\sigma R^2 \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi}{r^2}\vec{u}_{PM}.\vec{u}_z$$

Or : $r^2 = R^2\sin^2\theta + \left(z + R\cos\theta\right)^2$ et $\vec{u}_{PM}.\vec{u}_z = \cos\alpha = \dfrac{z + R\cos\theta}{r}$

D'où :

$$\mathrm{d}E_z = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{\sigma R^2 \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi}{\left(R^2\sin^2\theta + \left(z + R\cos\theta\right)^2\right)^{3/2}}$$

Par intégration :

$$E_z = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi/2}\frac{\sigma R^2 \sin\theta(z + R\cos\theta)\mathrm{d}\theta}{\left(R^2\sin^2\theta + \left(z + R\cos\theta\right)^2\right)^{3/2}}$$

$$E_z = \frac{\sigma R^2}{2\varepsilon_o}\int_0^{\pi/2}\frac{\sin\theta(z + R\cos\theta)\mathrm{d}\theta}{\left(R^2 + z^2 + 2zR\cos\theta\right)^{3/2}}$$

$$E_z = \frac{\sigma R^2}{2\varepsilon_o}\left(\int_0^{\pi/2}\frac{z\sin\theta\mathrm{d}\theta}{\left(R^2 + z^2 + 2zR\cos\theta\right)^{3/2}} + \int_0^{\pi/2}\frac{R\sin\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta}{\left(R^2 + z^2 + 2zR\cos\theta\right)^{3/2}}\right)$$

Or :

$$\mathrm{d}\left(R^2 + 2zR\cos\theta + z^2\right)^{-1/2} = \frac{1}{2}\frac{1}{\left(R^2 + 2zR\cos\theta + z^2\right)^{3/2}}2zR\sin\theta\mathrm{d}\theta$$

$$\mathrm{d}\left(R^2 + 2zR\cos\theta + z^2\right)^{-1/2} = zR\frac{\sin\theta\mathrm{d}\theta}{\left(R^2 + 2zR\cos\theta + z^2\right)^{3/2}}$$

Soit :

$$E_z = \frac{\sigma R^2}{2\varepsilon_o}\left(\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}\left(R^2 + 2zR\cos\theta + z^2\right)^{-1/2}}{R} + \int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}\left(R^2 + 2zR\cos\theta + z^2\right)^{-1/2}}{z}\cos\theta\right)$$

Posons :

$$X = \left(R^2 + 2zR\cos\theta + z^2\right)^{-1/2} \quad \rightarrow \quad \cos\theta = \frac{1}{2zR}\left(\frac{1}{X^2} - z^2 - R^2\right)$$

Pour :

$$\text{pour } \theta = 0 \quad X = \frac{1}{R + z}$$

$$\text{pour } \theta = \pi/2 \quad X = \frac{1}{(R^2 + z^2)^{1/2}}$$

$$E_z = \frac{\sigma R^2}{2\varepsilon_o}\left(\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}\left(R^2 + 2zR\cos\theta + z^2\right)^{-1/2}}{R} + \int_{X=\frac{1}{R+z}}^{X=\frac{1}{(R^2+z^2)^{1/2}}}\frac{1}{2z^2R}\left(\frac{1}{X^2} - z^2 - R^2\right)\mathrm{d}X\right)$$

www.kholaweb.com

$$E_z = \frac{\sigma R}{2\varepsilon_o}\left(\frac{1}{\left(R^2+z^2\right)^{1/2}} - \frac{1}{R+z}\right) + \frac{\sigma R}{4\varepsilon_o z^2}\int_{X=\frac{1}{R+z}}^{X=\frac{1}{(R^2+z^2)^{1/2}}} \left(\frac{1}{X^2} - z^2 - R^2\right)\mathrm{dX}$$

$$E_z = \frac{\sigma R}{2\varepsilon_o}\left(\frac{1}{\left(R^2+z^2\right)^{1/2}} - \frac{1}{R+z}\right) - \frac{\sigma R}{4\varepsilon_o z^2}\left[\frac{1}{X} + \left(z^2+R^2\right)X\right]_{X=\frac{1}{R+z}}^{X=\frac{1}{(R^2+z^2)^{1/2}}}$$

$$E_z = \frac{\sigma R}{2\varepsilon_o}\left(\frac{1}{\left(R^2+z^2\right)^{1/2}} - \frac{1}{R+z}\right) - \frac{\sigma R}{4\varepsilon_o z^2}\left(\left(R^2+z^2\right)^{1/2} + \frac{\left(R^2+z^2\right)}{\left(R^2+z^2\right)^{1/2}} - \left(R+z\right) - \frac{R^2+z^2}{R+z}\right)$$

$$E_z = \frac{\sigma R}{2\varepsilon_o}\left(\frac{1}{\left(R^2+z^2\right)^{1/2}} - \frac{1}{R+z}\right) - \frac{\sigma R}{4\varepsilon_o z^2}\left(2\left(R^2+z^2\right)^{1/2} - 2\frac{R^2+z^2+zR}{R+z}\right)$$

$$E_z = \frac{\sigma R}{2\varepsilon_o}\left(\frac{1}{\left(R^2+z^2\right)^{1/2}} - \frac{1}{R+z} - \frac{\left(R^2+z^2\right)^{1/2}}{z^2} + \frac{R^2+z^2+zR}{z^2\left(R+z\right)}\right)$$

$$E_z = \frac{\sigma R}{2\varepsilon_o}\left(\frac{1}{\left(R^2+z^2\right)^{1/2}} - \frac{\left(R^2+z^2\right)^{1/2}}{z^2} + \frac{1}{R+z}\left(\frac{R^2+z^2+zR}{z^2} - 1\right)\right)$$

$$\boxed{E_z = \frac{\sigma R}{2\varepsilon_o}\left(\frac{R}{z^2} + \frac{1}{\left(R^2+z^2\right)^{1/2}} - \frac{\left(R^2+z^2\right)^{1/2}}{z^2}\right)}$$

On calcule la limite de E_z lorsque z tend vers 0

$$E_z = \frac{\sigma R}{2\varepsilon_o}\left(\frac{R}{z^2} + \frac{1}{\left(R^2+z^2\right)^{1/2}} - \frac{\left(R^2+z^2\right)^{1/2}}{z^2}\right) = \frac{\sigma R}{2\varepsilon_o}\left(\frac{R}{z^2} + \frac{1}{R}\left(1+\frac{z^2}{R^2}\right)^{-1/2} - \frac{R}{z^2}\left(1+\frac{z^2}{R^2}\right)^{-1/2}\right)$$

$$E_z(O) \approx \frac{\sigma R}{2\varepsilon_o}\left(\frac{R}{z^2} + \frac{1}{R} - \frac{1}{2}\frac{z^2}{R^3} - \frac{R}{z^2} - \frac{1}{2R}\right)$$

$$E_z(O) \approx \frac{\sigma R}{2\varepsilon_o}\left(\frac{1}{2R} - \frac{1}{2}\frac{z^2}{R^3}\right)$$

$$E_z(O) = \frac{\sigma}{4\varepsilon_o}$$

www.kholaweb.com